5.臨界指数の展開理論 : 連続的に変る臨界指数(「量子液体と量子固体の理論」研究会報告,基研短期研究会報告)

鈴木, 増雄

5. 臨界指数の展開理論　―連続的に変る臨界指数―

東大物性研　鈴　木　増　雄

臨界指数の古典的な決め方の1つとして，相互作用についての摂動展開を高次まで行ない，それに ratio method やPade等を適用し，近似的に評価する方法がある。ここでは，それとは違って，臨界指数そのものを適当なパラメータ λ で展開する一般的な方法を議論 ，いくつかの具体例に応用した結果を報告する。さて，一般に，ハミルトニアン $\mathscr{H}=\mathscr{H}(\lambda)$ の如く，パラメータ λ を含むか，或いは，もっと一般に，（次元 d のように）位相空間の積分のところにパラメータ λ が含まれる場合を考える。今，仮に，$\lambda=0$ のところですでに相転移が起り，そこでの臨界的な振舞がよくわかっているとしよう。その場合には，任意の物理量Qを

$$Q = Q_0 + \lambda Q_1 + \lambda^2 Q_2 + \cdots\cdots \tag{1}$$

の如く，λ で展開 ，その展開係数 Q_1，Q_2，……… の T_c 近傍での異常性を調べることができる。一方，Qが $T_c(\lambda)$ の近くで，

$$Q \simeq A(\lambda)\,\varepsilon(\lambda)^{-\phi(\lambda)} \quad ; \quad \varepsilon(\lambda)=\{T-T_c(\lambda)\}/T_c(\lambda), \tag{2}$$

のような異常性を持つと仮定 ，これを λ で微分すると，

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=0} \simeq -A\phi(0)\,\varepsilon'(0)\,\varepsilon^{-\phi-1} - A\phi'(0)\,\varepsilon^{-\phi}\ \ln\varepsilon + A'(0)\,\varepsilon^{-\phi} \tag{3}$$

のようになる。そこで，(1)の Q_1 の漸近形

$$Q_1 \simeq Q_1^{(1)}\,\varepsilon^{-\phi-1} + Q_1^{(2)}\,\varepsilon^{-\phi}\ln\varepsilon + O(\varepsilon^{-\phi}), \tag{4}$$

と求まったとすれば，(3)と(4)を比較して，

(matching conditions)

(Ⅰ) T_cの shift → $\varepsilon'(0) = -Q_1^{(1)}/A$ (5)

(Ⅱ) 臨界指数の shift → $\phi'(0) = -Q_1^{(2)}/A$, (6)

となる。こう て，高次まで進めると，次のように T_c と ϕが展開形式で求まる [1)2)]

$$T_c(\lambda) = T_c(0) + \lambda T_1 + \lambda^2 T_2 + \cdots\cdots, \tag{7}$$

$$\phi(\lambda) = \phi(0) + \lambda\phi_1 + \lambda^2\phi_2 + \cdots\cdots。 \tag{8}$$

上の展開理論の応用例を２・３以下に述べる。

例１：eight－vertex model[3)] と連続的に変る臨界指数

この模型はイジングスピンで表現すると，次のようになる [4)]

$$\mathscr{H} = -J^{+}\sum_{j,k}\sigma_{j,k}\,\sigma_{j+1,k+1} - J^{-}\sum_{j,k}\sigma_{j+1,k}\,\sigma_{j,k+1} \tag{9}$$

$$-\lambda\sum_{j,k}\sigma_{j,k}\,\sigma_{j+1,k+1}\,\sigma_{j+1,k}\,\sigma_{j,k+1}$$

$\lambda = 0$では，$\mathscr{H}$は独立な２つの２次元イジング模型を表わしているから，その厳密解は良く知られている。そこで，上の一般論にならって，例えば，帯磁率χの臨界指数γをλの関数とみなして，λについて展開してみる。

$$Q_1 = \chi_1 = \left(\frac{\partial\chi}{\partial\lambda}\right)_{\lambda=0} = u\left(\frac{\partial\chi}{\partial J}\right)_{\lambda=0} \simeq \frac{\gamma(0)\chi}{\sqrt{2}J\varepsilon} - \frac{4\gamma(0)\chi}{\pi k T_c}\ \ln\varepsilon \tag{10}$$

但し，uは２次元正方格子（$\lambda = 0$）における最近接のスピン相関を表わす。(10)式は正しく，(4)の形をしている。従って，matching condition より，特に，臨界指数の１次の変化は

$$\gamma'(0) = -4\gamma(0)/(\pi k T_c) \tag{11}$$

と求まり，臨界指数は，パラメータλに依存し連続的に変ることになる。こういう universality を破る結果が現れた理由は，上の議論からわかるように，(9)において４体力の項が丁度，（エネルギー密度）×（エネルギー密度）の型になっていて，(10)式の

第３番目の等式が成立し，その上，$\lambda=0$で比熱に対数発散があるという２つの条件が同時に充たされたことにある。

例２：multilayer Ising model with four−body interaction

この模型は，次のハミルトニアンで表わされる。[1)4)]

$$\mathcal{H}_{2\text{-}4} = -\sum_{<ij,mn>}\left(\sum_{k=1}^{L} J\sigma_{ij,k}\sigma_{mn,k} + \lambda\sum_{k=1}^{L-1}\sigma_{ij,k}\sigma_{ij,k+1}\sigma_{mn,k}\sigma_{mn,k+1}\right) \tag{12}$$

例１と全く同様にして，次の結果が得られる。[1), 4), 5)]

$$\frac{\gamma(\lambda)}{\gamma(o)} = \frac{\beta(\lambda)}{\beta(o)} = \frac{\nu(\lambda)}{\nu(o)} = 1-\frac{4}{\pi}\frac{\lambda}{kT_c(o)} + O(\lambda^2) \tag{13}$$

例３：classical n−vector model with long−range interaction

n−vector $\vec{S}_j=(\sigma_{j1}, \sigma_{j2}, \cdots\cdots, \sigma_{jn})$ を用いて，ハミルトニアンは，次のように書かれる[6)]：

$$\mathcal{H} = -\sum_{i>j} J r_{ij}^{-(d+\sigma)}(\vec{S}_i\cdot\vec{S}_j) 。 \tag{14}$$

但，σ_{jk} は$-\infty<\sigma_{jk}<\infty$ の値を連続的にとり，$\sum_{k=1}^{n}\sigma^2_{jk}=n$ を充しているものとする。$n=\infty$ の場合は spherical model と呼ばれ，厳密に解かれている。[7)]（尚，$n=1$はイジング模型，$n=2$はボーズ系，$n=3$はハイゼンベルグ模型に対応する。）そこで，Abe[8)] にならって，λとして$1/n$をとり，$1/n$の展開を行なう。ここでは，long−range interction の場合に興味があるので，$0<\sigma<\min(d, 2)$とする。次数$1/n$までの展開で次の結果が得られる。

（Ⅰ） classical region

critical potential range σ_c があって$0<\sigma<\sigma_c$ $(\sigma_c=\frac{1}{2}d)$ では，$\gamma=1$ (classical)になる。さらに，

a） $0<\sigma<\frac{1}{3}d$では，$\chi\sim\varepsilon^{-1}+O(1)$,

b） $\frac{1}{3}d<\sigma<\frac{1}{2}d$では，

$$\chi\sim\frac{b_1}{\varepsilon}+\frac{b_2}{\varepsilon^{3-d/\sigma}}+O(1),$$

形になり，$0 < 3 - d/\sigma < 1$より，main singularity より弱いけれどもそれに近い発散項が存在する。（これを confluent singularity と呼ぶ）こういう confluent singularity が存在する場合には，それを1つの singularity で解析しようとすると，見かけ上，臨界指数の連続的に変るように見えることがあるので注意を要する。実際Nagle達[9] の数値計算の結果（$d=1$）ではσが$\frac{1}{3}$のあたりから，臨界指数は non−classical になり始める，これは，confluent singularity ためであると考えられる。

(Ⅱ) non−classical region : $\frac{1}{2}d < \sigma$

$Q_1 \equiv \chi_1$の解析を行なうと，(4)のように，$\varepsilon^{-\gamma} \ln \varepsilon$ の項が現れ，臨界指数は，nに依存することがわかる。

詳しくは，「相転移の統計力学」の研究会報告を参照して欲しい。

参考文献

1) M. Suzuki: Phys. Rev. Letters 28 (1972) 507
2) K.Wilson: Phys. Rev. Letters 28 (1972) 548
3) R.J. Baxter: Phys. Rev. Letters, 26 (1971) 832
Ann. Phys. 70 (1972) 193
4) 鈴木増雄：固体物理 7 (1972) 37
5) 鈴木増雄：日本物理学会誌8月号 (1972)
6) H.E.Stanley, Phys. Rev. Letters 20 (1968) 589
Phys. Rev. 176 (1968) 718
7) G.S. Joyce: Phys. Rev. 146 (1966) 349
8) R. Abe: Prog. Theor. Phys. (in press)
9) J.E.Nagle and J.C.Bonner; J. Physics C 3(1970) 352